

REINER KÜHNAU

## Zur möglichst konformen Spiegelung

*Edgar Reich zum 75. Geburtstag*

ABSTRACT. We construct the extremal quasiconformal reflection in the set  $E$  consisting of a circular arc and an isolated point. We use the famous Teichmüller "Verschiebungssatz". The set of fixpoints is a quasicircle which therefore has the same "reflection coefficient" as  $E$ .

**1. Einleitung.** In [Ku 2], [Ku 7] wurde die Frage gestellt, an welchen Punkt Mengen  $E$  der komplexen Zahlenebene eine quasikonforme Spiegelung möglich ist, d. h. eine orientierungsumkehrende quasikonforme Abbildung der Zahlenkugel auf sich, bei der sämtliche Punkte von  $E$  fest bleiben. Vollständig wurde durch L. V. Ahlfors geklärt, für welche geschlossene Jordankurven dies gilt: Dies ist genau für Quasikreise der Fall [Ku 1]. Unlängst wurde in [Kr] gezeigt, daß allgemein genau dann an  $E$  quasikonform gespiegelt werden kann, wenn  $E$  auf einem Quasikreis  $L$  liegt. Für die jeweils kleinstmögliche Dilatationsschranke (= "Spiegelungskoeffizient")  $Q_E \geq 1$  bzw.  $Q_L \geq 1$  gilt dabei

$$(1) \quad Q_E \leq \inf_{L \supset E} Q_L \leq Q_E^4.$$

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30C62, 30C75.

*Key words and phrases.* Quasiconformal reflection, quasicircle, reflection coefficient, extremal quasiconformal reflection, Teichmüller shift theorem ("Verschiebungssatz").

In [Kr] war am Schluss die Frage, ob sogar immer ein  $L \supset E$  existiert mit  $Q_E = Q_L$ . Nach [Ku 5] ist dies in der Tat der Fall z. B. für Mengen  $E$ , bestehend aus endlich vielen Punkten; Genaueres in [Ku 6] für 4 Punkte. Dann existiert genau ein  $L \supset E$  mit  $Q_E = Q_L$ . Aber es kann bei  $Q_E = Q_L$  auch sein, dass das "extremale"  $L$  nicht eindeutig bestimmt ist. Man vgl. nämlich den Fall,  $E$  besteht aus zwei in einem Punkt orthogonal zusammenstossenden Strecken [Ku 2], [Ku 3], [Kr]. Dann gilt z. B. für jede  $E$  enthaltende Quadratlinie  $Q_E = Q_L$ .

In vorliegender Mitteilung soll nun genauer der Fall betrachtet werden,  $E$  besteht aus einem Kreisbogen und einem nicht hierauf liegenden einzelnen Punkt. Wir können den trivialen Fall ausschliessen, dass dieser Punkt auf dem Trägerkreis des Kreisbogens liegt. Dann können wir weiter vermöge einer linearen Transformation annehmen, dass

- (2)  $E$  besteht aus der abgeschlossenen Strecke mit Endpunkten  $\pm 2i$  und dem einzelnen Punkt  $t > 0$ .

Das mag manch einem "sehr speziell" erscheinen (das kennen wir ja). Aber immerhin ist dies ein reizvolles Beispiel, wo sich alles "ausrechnen" lässt.

Wir beweisen hier den

**Satz 1.** *Es gilt für (2)*

$$(3) \quad Q_E = 1 + \text{Sin}^{-2} \left\{ \frac{1}{2} \mu \left( \frac{2}{\sqrt{t^2 + 4}} \right) \right\}.$$

Dabei bezeichnet die Funktion  $\mu(\dots)$  den Modul des Extremalgebiets von Grötzsch [L/V] (S. 62).

*Es gibt genau eine möglichst konforme (= extremal quasikonforme) Spiegelung an  $E$  (mit also kleinstmöglicher Dilatationsschranke (3) unter allen quasikonformen Spiegelungen an  $E$ ). Diese besitzt die konstante Dilatation (3), und die Hauptverzerrungsrichtungen werden durch ein quadratisches Differential beschrieben.*

*Darüberhinaus existiert genau ein Quasikreis  $L \supset E$  mit  $Q_E = Q_L$ . Dieses  $L$  besteht nebst  $E$  aus zwei Jordanbögen (in Fig. 2,  $U$ -Ebene, gestrichelt), die  $t$  mit  $\pm 2i$  verbinden, sich bei Spiegelung an der reellen Achse vertauschen, analytisch sind mit Einschluss des einen Endpunktes  $t$ . Im anderen Endpunkt  $\pm 2i$  existiert immerhin noch die einseitige Tangente. Und zwar entsteht dieses  $L$ , wenn wir mit diesem  $t$  bilden*

$$(4) \quad q = \frac{\sqrt{Q_E} - 1}{\sqrt{Q_E} + 1}$$

*und die Ellipsenscheibe mit den Scheiteln  $\pm(1+q^2)$ ,  $\pm(1-q^2)i$  schlicht konform auf das Äussere der Strecke  $-2i, \dots, 2i$  so abbilden, dass  $0 \rightarrow \infty$  und*

$(1-q^2)i \rightarrow -2i, -(1-q^2)i \rightarrow 2i$ . (Dann folgt für den rechten Brennpunkt  $2q \rightarrow t$ .) Es ist  $L \setminus E$  dabei das Bild des Streckenpaares  $2q, \dots, (1-q^2)i$  und  $2q, \dots, -(1-q^2)i$ .

$L$  besitzt in  $t$  eine einspringende Ecke mit dem Aussenwinkel  $\pi - 4 \arctan q$ . In  $\pm 2i$  besitzt  $L$  jeweils eine ausspringende Ecke mit Innenwinkel  $\pi - 4 \arctan q$ . Es wird  $L \setminus E$  von den Hauptverzerrungsrichtungen der möglichst konformen Spiegelung unter dem Winkel  $\arctan \frac{1}{\sqrt{Q_E}}$  geschnitten.

**Bemerkungen.** Formel (3) wurde schon in anderer Gestalt für den äquivalenten Fall,  $E$  besteht aus einem Kreisbogen und dem Punkt  $\infty$ , in [Ku 4] hergeleitet aus dem Teichmüllerschen Verschiebungssatz [Te]. Die Fig. 2 in [Ku 4] (massstabsgerecht!) entspricht nach Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  gerade unserer Situation in Satz 1 für  $t \rightarrow +\infty$ . Neu ist hier in Satz 1 die Aussage über  $L$ .

## 2. Teichmüllerscher Verschiebungssatz [Te] in neuer Aufzäumung.

(a) In [Te] löst O. Teichmüller die Aufgabe, unter allen  $Q$ -quasikonformen Abbildungen der Einheitskreisscheibe auf sich, die sämtliche Randpunkte festhalten, diejenigen zu bestimmen, für die der Mittelpunkt maximal "verschoben" wird. In [Re] gibt E. Reich eine hübsche neue Darstellung und Herleitung. Im folgenden geben wir dieser Reichschen Darstellung eine mehr geometrische Wendung, wobei man den eigentlichen Extremalbeweis (der im Kern natürlich wieder wie in [Te] ist) auch mit Hilfe eines gewissen Extremalproblems bei quasikonform fortsetzbaren konformen Abbildungen führen kann. Diese Reichsche Version erweist sich als sehr günstig bei der Anwendung im dann anschliessenden Beweis von Satz 1. In den Überlegungen wimmelt es in eigentümlicher Weise von Kegelschnitten.

(b) Entsprechend dem Schema von Fig. 1 wird zu jedem  $q$  mit  $0 < q < 1$  bzw. zu jedem

$$(5) \quad Q = \left( \frac{1+q}{1-q} \right)^2 > 1$$

eine  $Q$ -quasikonforme Abbildung  $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\mathfrak{z})$  der Ellipsenscheibe der  $\mathfrak{z}$ -Ebene (mit Mittelpunkt 0 und Scheiteln  $\pm(1+q^2)$  und  $\pm(1-q^2)i$ ) auf sich herstellt. Man führt dementsprechend die Abbildungsketten  $\zeta \rightarrow z \rightarrow \mathfrak{z}$  und  $\zeta \rightarrow w \rightarrow \mathfrak{w}$  durch, startend jeweils in der Einheitskreisscheibe der  $\zeta$ -Ebene. (In den vier Ebenen  $z, w, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}$  entstehen jeweils Ellipsen als Bild von  $|\zeta| = 1$ .) Diese Abbildung  $\mathfrak{w}(z)$  entsteht durch Zusammensetzung elementarer Abbildungen, wobei zwei  $\frac{1+q}{1-q}$ -quasikonforme Abbildungen auftreten, nämlich  $z^{-1}(\zeta)$  und  $w(\zeta)$ . Offenbar bleiben bei  $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$  alle Randpunkte dieser Ellipse fest, da sich diese Randabbildung gemäss Fig. 1 auch ergibt bei der hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildung des (zunächst zweiblättrigen) Äusseren dieser Ellipse auf sich - das ist die Identität.

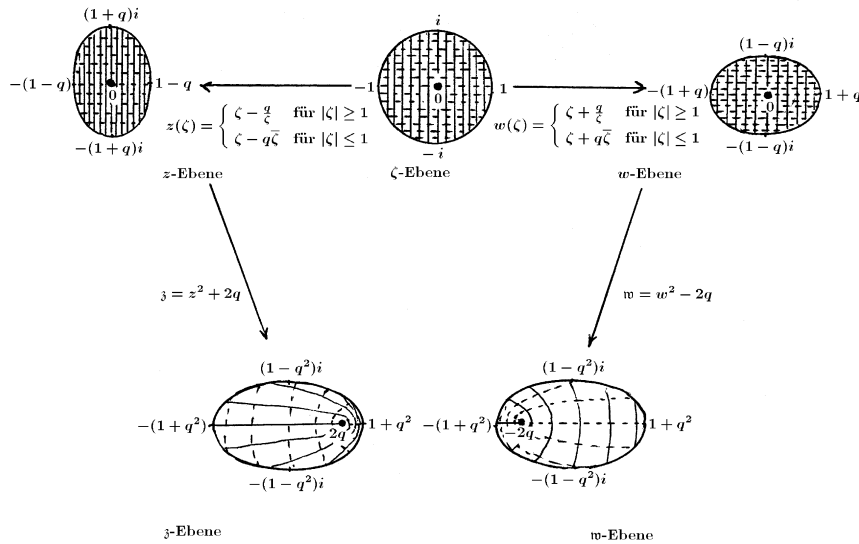


FIG. 1

(c) Jede  $Q^*$ -quasikonforme Abbildung  $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{z})$  dieser Ellipsenscheibe der  $\mathfrak{z}$ -Ebene auf sich mit festen Randwerten und ebenfalls (wie bei  $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ ) Transformation des rechten Brennpunktes in den linken Brennpunkt induziert gemäss Fig. 1 eine  $Q^*$ -quasikonforme Abbildung  $w^*(z)$  der Ellipsenscheibe der  $z$ -Ebene (mit Halbachsen  $1 - q$  und  $1 + q$ ) auf die Ellipsenscheibe der  $w$ -Ebene (und Scheiteln  $\pm(1 + q)$  und  $\pm(1 - q)i$ ). Dieses  $w^*(z)$  stimmt auf dem Rande mit der affinen Abbildung  $w(z)$  von Fig. 1 überein, lässt sich also ebenfalls zu der sich aus Fig. 1 ergebenden hydrodynamisch normierten schlichten konformen Abbildung des Äusseren fortsetzen, so dass insbesondere die Koeffizienten von  $1/z$  der Laurententwicklung in  $z = \infty$  übereinstimmen. Nun wird in [Kr/Ku] (Zweiter Teil) in Satz 5 von Kap. I, §4 gesetzt  $p_0(z) \equiv 1$  für  $z$  ausserhalb der Ellipse der  $z$ -Ebene,  $p_0(z) \equiv Q$  innerhalb. Ferner sei  $\theta = 0$ , so dass  $w(z)$  dem  $g_\theta(z)$  des genannten Satz 5 in [Kr/Ku] entspricht. So folgt durch indirekten Beweis  $Q^* \geq Q$  mit Gleichheit genau für  $w^*(z) \equiv w(z)$ , also  $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{z}) \equiv \mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ .

Damit haben wir das angekündigte Resultat von E. Reich wie folgt.

**Satz 2 [Re].** Für alle  $Q^*$ -quasikonformen Abbildungen  $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{z})$  der Ellipse der  $\mathfrak{z}$ -Ebene (vgl. Fig. 1) mit den Scheiteln  $\pm(1+q^2)$  und  $\pm(1-q^2)i$  auf sich, wobei sämtliche Randpunkte fest bleiben und der rechte Brennpunkt in den linken Brennpunkt übergeht, gilt  $Q^* \geq Q$  (vgl.(5)). Das Gleichheitszeichen steht genau für  $\mathfrak{w}^*(\mathfrak{z}) \equiv \mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ .

Übrigens sind bei diesem extremalen  $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$  die Hauptverzerrungslinien in der  $\mathfrak{z}$ - und in der  $\mathfrak{w}$ -Ebene zu  $2q$  bzw  $-2q$  konfokale Parabeln (in Fig. 1

ausgezogen bzw. gestrichelt).

(d) Wir transformieren nun noch die Ellipsenscheibe der  $\mathfrak{z}$ -Ebene schlicht konform durch  $Z(\mathfrak{z})$  auf  $|Z| < 1$  mit  $Z(2q) = 0, Z'(2q) > 0$ . Es wird  $Z(-2q) < 0$ , wobei

$$(6) \quad \lambda(Q) = -Z(-2q) > 0$$

eine explizit herstellbare Funktion von  $Q$  wird. Diese Funktion ergibt sich auch aus der Gleichheit des konformen Moduls der geradlinig zwischen den Brennpunkten geschlitzten Ellipsenscheibe der  $\mathfrak{z}$ -Ebene (elementar konform äquivalent einem konzentrischen Kreisring mit Radien  $q$  und  $1$ ) und des durch elliptische Integrale darstellbaren konformen Moduls der geradlinig von  $-\lambda(Q)$  nach  $0$  geschlitzten Einheitskreisscheibe: "Extremalgebiet von Grötzsch" in [L/V] mit der charakterisierenden Grösse  $\mu$ . Es ist der Zusammenhang mit  $\lambda$  gegeben durch

$$(7) \quad \mu(\lambda(Q)) = \log \frac{1}{q}.$$

Auch ergibt sich so, dass  $\lambda(Q)$  eigentlich monoton steigend ist mit  $\lambda(Q) \rightarrow 1$  für  $Q \rightarrow \infty$ .

(e) Es ergibt sich nun nach (c) durch diese konforme Überpflanzung  $Z(\mathfrak{z})$ : Für alle  $Q^*$ -quasikonformen Abbildungen  $W(Z)$  von  $|Z| < 1$  auf  $|W| < 1$ , wobei sämtliche Randpunkte festbleiben und  $W(0) = -\lambda(Q)$  mit einem  $Q > 1$  sei, gilt  $Q^* \geq Q$ . Das Gleichheitszeichen steht für genau eine Abbildung (die sich sofort aus  $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$  ergibt).

Hieraus bekommen wir nun wegen der Monotonie von  $\lambda(Q)$  endgültig den Teichmüllerschen Verschiebungssatz selbst.

**Satz 3 [Te].** In der Klasse der  $Q^*$ -quasikonformen Abbildungen von  $|Z| < 1$  auf  $|W| < 1$ , die sämtliche Randpunkte festhalten, ist der genaue Wertebereich von  $W(0)$  die durch  $|W(0)| \leq \lambda(Q^*)$  definierte abgeschlossene Kreisscheibe. Es wird z. B.  $W(0) = -\lambda(Q^*)$  für genau eine Abbildung, die sich aus  $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$  ergibt.

**Beweis von Satz 1.** Wir plazieren das durch (2) definierte  $E$  in einer komplexen  $U$ -Ebene (vgl. Fig. 2).

Die längs der Strecke zwischen  $-2i$  und  $+2i$  geradlinig geschlitzte  $U$ -Ebene wird konform, aber orientierungsumkehrend auf das Innere des Einheitskreises einer  $V$ -Ebene so abgebildet, dass  $-2i \rightarrow -i, +2i \rightarrow +i, \infty \rightarrow 0$ . Die Umkehrung dieser Abbildung ist

$$(8) \quad U = \frac{1}{\bar{V}} - \bar{V}.$$

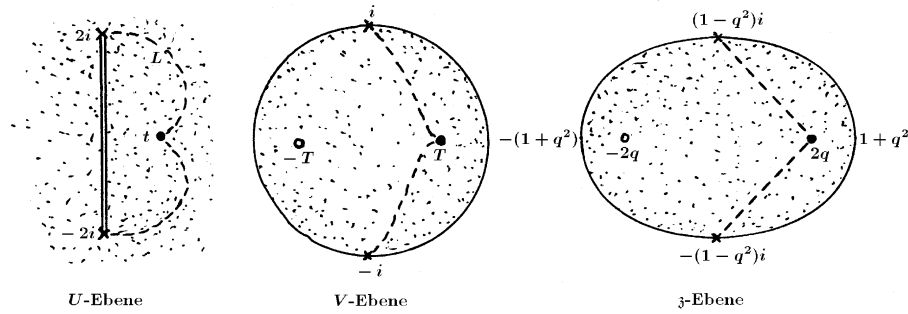


FIG. 2

Dabei geht  $t > 0$  über in einen Wert  $T > 0$  mit

$$(9) \quad t = \frac{1}{T} - T.$$

Sei nun eine beliebige  $Q^*$ -quasikonforme Spiegelung an  $E$  gegeben. Diese lässt ein zweites Exemplar der längs der Strecke  $-2i \dots +2i$  geschlitzten  $U$ -Ebene entstehen. Wenn wir dieses zweite Exemplar ebenfalls auf die Einheitskreisscheibe  $|V| < 1$  konform, aber jetzt orientierungserhaltend abbilden, ebenfalls mit  $-2i \rightarrow -i, +2i \rightarrow +i, \infty \rightarrow 0$ , jetzt aber  $t \rightarrow -T$ , so wird durch die quasikonforme Spiegelung an  $E$  induziert eine  $Q^*$ -quasikonforme Abbildung der Einheitskreisscheibe  $|V| < 1$  auf sich mit festen Randwerten und  $T \rightarrow -T$ .

Wir bilden anschliessend noch die Einheitskreisscheibe der  $V$ -Ebene auf eine Ellipsenscheibe einer  $\mathfrak{z}$ -Ebene so schlicht konform ab, dass  $+1$  übergeht in den Ellipsenscheitel  $1 + q^2$ ,  $-1$  in den Scheitel  $-(1 + q^2)$ ,  $i$  in den Scheitel  $(1 - q^2)i$ ,  $-i$  in den Scheitel  $-(1 - q^2)i$ , mit einem gewissen  $q, 0 < q < 1$ . Dieses  $q$  wird so gewählt, daß  $\pm T$  in die Brennpunkte  $\pm 2q$  übergehen.

Gleichsetzung der konformen Moduln der von  $-2q$  nach  $+2q$  geradlinig aufgeschnittenen Ellipsenscheibe und der von  $-T$  nach  $+T$  geradlinig aufgeschnittenen Einheitskreisscheibe (= ein Extremalgebiet von Grötzsch  $[L/V]$  nach linearer Transformation) liefert

$$(10) \quad \log \frac{1}{q} = \mu \left( \frac{2T}{1 + T^2} \right),$$

woraus dieses  $q$  eindeutig folgt.

So induziert schliesslich die  $Q^*$ -quasikonforme Spiegelung an  $E$  eine  $Q^*$ -quasikonforme Abbildung der Ellipsenscheibe der  $\mathfrak{z}$ -Ebene auf sich mit festen Randwerten und Vertauschung der Brennpunkte:  $2q \rightarrow -2q$ .

Wir können nun die  $\mathfrak{z}$ -Ebene der Fig. 2 mit der  $\mathfrak{z}$ -Ebene der Fig. 1 identifizieren, so dass das minimal möglich  $Q^*$  gerade durch die rechte Seite von (5) gegeben wird. Dieser Wert ergibt sich damit aus (9) und (10). Das liefert (3), und die zugehörige möglichst konforme Spiegelung an  $E$  ist eindeutig bestimmt.

Wenn nun weiter ein  $L \supset E$  existiert mit  $Q_E = Q_L$ , besteht dieses  $L$  bei der eben konstruierten möglichst konformen Spiegelung (mit Dilatation  $Q_E$ ) an  $E$  in der  $U$ -Ebene aus  $E$  und zusätzlich aus Fixpunkten, also in der  $\mathfrak{z}$ -Ebene aus solchen Punkten  $\mathfrak{z}$ , die in den jeweiligen Spiegelpunkt an der imaginären Achse übergehen. Solchen  $\mathfrak{z}$  entsprechen nach Fig. 1 gewisse  $\zeta$  mit

$$(\zeta - q\bar{\zeta})^2 + 2q = \overline{-(\zeta + q\bar{\zeta})^2 - 2q},$$

was imaginäre  $\zeta^2$  nach sich zieht. Diesen  $\zeta$  entsprechen nun alle Punkte  $\mathfrak{z}$ , die auf den beiden Verbindungsstrecken des Brennpunktes  $2q$  mit den Scheiteln  $\pm(1 - q^2)i$  liegen (in Fig. 2 gestrichelt). Diese Punktmenge kann man nun in die  $U$ -Ebene zurückübertragen und erhält tatsächlich zwei Jordanbögen, die  $t$  mit  $\pm 2i$  verbinden, so dass es genau ein  $L \supset E$  mit  $Q_E = Q_L$  gibt. Die in Satz 1 noch genannten Winkel bei diesem  $L$  ergeben sich aus den Winkelverhältnissen in der  $\mathfrak{z}$ -Ebene und der Konformität bei Übergang in die  $U$ -Ebene.

**Äquivalente Frage.** Sei unverändert  $E$  die durch (2) definierte Punktmenge. Der Satz 1 lässt sich analog wie in dem Falle,  $E$  besteht aus endlich vielen Punkten [Ku 5], in folgende äquivalente Form umgiessen.

**Satz 4.** *Unter allen quasikonformen Abbildungen der Vollkugel auf sich, bei denen  $t \rightarrow \infty$  und die Strecke  $-2i \dots + 2i$  in sich übergeht, nicht notwendig punktweis aber o. E. d. A. mit Fixpunkten  $\pm 2i$ , gibt es genau eine möglichst konforme, d.h. eine, für die die kleinste Dilatationsschranke möglichst klein ist. Dabei geht das extremale  $L$  von Satz 1 in die imaginäre Achse über.*

*Diese möglichst konforme Abbildung entsteht, wenn man in Fig. 1 noch eine  $\eta$ -Ebene unterbringt (zweckmässig zwischen  $\mathfrak{z}$ - und  $\mathfrak{w}$ -Ebene) und die konforme Abbildung  $\eta(\zeta)$  von  $|\zeta| < 1$  auf die zweiblättrige Ellipsenscheibe mit Windungspunkt in  $\eta = 0$  und Scheiteln  $\pm(1 + q^2)$ ,  $\pm(1 - q^2)i$  betrachtet, bei den Nebenbedingungen für  $\eta(\zeta) : 0 \rightarrow 0, \pm 1 \rightarrow 1 + q^2, \pm i \rightarrow -(1 + q^2)$ . Die oben im Satz genannte möglichst konforme Abbildung wird dann induziert aus der Zusammensetzung  $\mathfrak{z} \rightarrow z \rightarrow \zeta \rightarrow \eta$  (insgesamt  $\sqrt{Q_E}$ -quasikonform), in dem man die beiden Ellipsenscheiben (nun schlicht aufgefasst) der  $\eta$ - und  $\mathfrak{z}$ -Ebene auf das Äussere der Strecke  $-2i \dots + 2i$  gemäss der nach (4) genannten Abbildung noch schlicht konform überpflanzt.*

Der **Beweis** verläuft wie beim analogen Falle,  $E$  besteht aus endlich vielen Punkten (Satz 2 und 3 in [Ku 5]).

Nimmt man die möglichst konforme Spiegelung an  $E$  (vgl. Satz 1) und führt anschliessend noch die Spiegelung an der imaginären Achse durch, hat die resultierende  $Q_E$ -quasikonforme Abbildung (u. a.) die 3 Fixpunkte  $\pm 2i, 0$ . Sie lässt sich gemäss Satz 2 in [Ku 3] auf genau eine Weise durch zwei  $\sqrt{Q_E}$ -quasikonforme Abbildungen der Vollkugel mit ebenfalls den Fixpunkten  $\pm 2i, 0$  faktorisieren. So entsteht als 1. Schritt ("Faktor") eine  $\sqrt{Q_E}$ -quasikonforme Abbildung  $\varphi$  der Vollkugel auf sich, wobei nach dem Unitätssatz in Satz 2 in [Ku 3]  $t$  und sämtliche Punkte der Strecke  $-2i \dots 2i$  in Punkte der imaginären Achse übergehen müssen. Aus gleichem Grunde muß das Bild von  $t$  speziell  $\infty$  sein. Und wieder wegen diesem Unitätssatz muss dieses  $\varphi$  mit der im Satz 2 definierten  $\sqrt{Q_E}$ -quasikonformen Abbildung übereinstimmen. Dass letztere tatsächlich die gegenüberstehenden Uferpunkte dieser Strecke wieder in gegenüberstehende Uferpunkte transformiert, liegt daran, dass Punkte auf der Ellipse der  $\eta$ -Ebene mit gleichem Imaginärteil übergehen in Punkte auf der Ellipse der  $\mathfrak{z}$ -Ebene mit gleichem Imaginärteil. Denn man rechnet sofort aus, dass Punkte  $\zeta$  und  $i\bar{\zeta} = i/\zeta$  auf  $|\zeta| = 1$  (entsprechen Punkten auf der Ellipse der  $\eta$ -Ebene mit gleichem Imaginärteil) in Ellipsenpunkte der  $\mathfrak{z}$ -Ebene mit gleichem Imaginärteil übergehen.

Dass diese Abbildung  $\varphi$  tatsächlich - wie in Satz 2 behauptet - möglichst konform bei den genannten Nebenbedingungen ist, ergibt sich wieder aus der Unitätsaussage zu Satz 2 in [Ku 3] durch die gleiche Schlussweise wie im Beweis von Satz 3 in [Ku 5].

### Schlussbemerkungen.

(a) Die Aussage im Satz 1 (am Schluss) über die Winkel ist genau so wie in [Ku 5]<sup>1</sup>, [Ku 6] im Falle,  $E$  besteht aus endlich vielen Punkten (abgesehen von Ausnahmefällen in [Ku 5]). Dadurch ist in  $t$  und  $\pm 2i$  wie in [Ku 5], [Ku 6] die Abweichung vom gestreckten Winkel geringer als nach der Eckenbedingung (11) in [Ku 1] "zulässig" wäre.

(b) Insbesondere für kleine  $t$  sieht das extremale  $L$  in Satz 1 scheinbar paradox aus, weil sich  $L$  von  $t$  aus zunächst von der Strecke  $-2i \dots + 2i$  entfernt. Um deshalb evtl. aufkeimende Sorgen zur Richtigkeit dieser Situation zu zerstreuen, betrachte man zum Falle,  $E$  besteht aus 4 Punkten, die etwa ähnliche Situation in [Ku 6], Seite 388 (dort z. B. mit Hilfswinkel  $\alpha = 40^\circ$ ).

(c) Bei der Frage (vgl. Anfang dieser Mitteilung), ob zu  $E$  ein  $L \supset E$  ex-

<sup>1</sup>Übersetzungsfehler im Russischen: Man ersetze vor (6'), vor (7) und in der 1. Zeile von Seite 101 "прямого угла" durch "развёрнутого угла" (=  $\pi$ ). (In der englischen Übersetzung ersetze man vor (6') und vor (7) "right angle" durch "straight angle".) In §7 ersetze man in der 4. Zeile "жордановой..." durch "квазиконформный жордановой...". (In der englischen Übersetzung ersetze man in §7 in der 3. Zeile "Jordan curve ..." durch "quasiconformal Jordan curve ...".)



istiert mit  $Q_E = Q_L$ , spielt wie im einfachen (aber trotzdem offenen) Falle,  $E$  ist ein einzelner Bogen [Ku 3], sicher eine entscheidende Rolle, ob zu  $E$  eine möglichst konforme Spiegelung existiert, die zusätzlich involutorisch ist (d.h. Spiegelung = der zugehörigen inversen Spiegelung). Ein Beweisansatz hierzu könnte sein, auf  $E$  zunächst  $n$  Punkte "geeignet" zu markieren, nach [Ku 5] zu verfahren, und anschliessend einen Verdichtungsprozess  $n \rightarrow \infty$  durchzuführen. Dabei ist natürlich wie in [Ku 5] zunächst dem Umstand Rechnung zu tragen, dass für die  $L$  verschiedene Homotopieklassen möglich sind. In unserem obigen Fall,  $E$  besteht aus einer Strecke und einem weiteren Punkt, war diese Homotopiefrage gegenstandslos: Es gibt nur eine Homotopieklasse.

(d) Zur Frage der involutorischen Spiegelung noch diese einfache Bemerkung: Schon bei einem einzelnen Jordanbogen  $E$  ist nicht jede Spiegelung auch involutorisch. Man vgl. einfach die Abbildung

$$w(z) = \begin{cases} \bar{z} & \text{für } \Re z \geq 0 \\ \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}\bar{z} & \text{für } \Re z \leq 0 \end{cases}$$

als Spiegelung an der positiv reellen Achse, aufgefasst als  $E$ : Es gibt hier tatsächlich gar keine Fixpunkte, ausser auf  $E$ .

#### LITERATUR

- [Kr/Ku] Krushkal, S. L., R. Kühnau, *Quasikonforme Abbildungen - neue Methoden und Anwendungen*, in Russisch: Nauka, Novosibirsk 1984, in Deutsch: Teubner-Verlag, Leipzig, 1983.
- [Kr] Krushkal, S. L., *Quasikonforme Spiegel*, Sibirsk. Mat. Zh. **40** (1999), 880–892 (Russisch); in Englisch: Siberian Math. J. **40** (1999), 742–753.
- [Ku 1] Kühnau, R., *Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **90** (1988), 90–109.
- [Ku 2] ———, *Möglichst konforme Spiegelung an einem Jordanbogen auf der Zahlenkugel*, Complex Analysis - Pfluger Anniversary Volume, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1988, pp. 139–156.
- [Ku 3] ———, *Möglichst konforme Spiegelung an Jordanbögen und ein Faktorisierungssatz bei quasikonformen Abbildungen*, Berichte Math.-Statist. Sektion Forschungsgesellschaft Joanneum - Graz, Nr. 300 (1988).
- [Ku 4] ———, *Möglichst konforme Spiegelung an einem Jordanbogen auf der Zahlenebene*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **14** (1990), 357–367.
- [Ku 5] ———, *Interpolation durch möglichst konforme Jordankurven*, Forschungsinst. f. Math. ETH Zürich, Preprint Febr. (1989); in Russisch: Sibirsk. Mat. Zh. **32** (1991), no. 2, 94–103; in Englisch: Siberian Math. J. **32** (1991), 257–264.
- [Ku 6] ———, *Möglichst konforme Jordankurven durch vier Punkte*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **36** (1991), 383–393.
- [Ku 7] ———, *Einige neuere Entwicklungen bei quasikonformen Abbildungen*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **94** (1992), 141–169.
- [L/V] Lehto, O., K. I. Virtanen, *Quasikonforme Abbildungen*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1965.

- [Re] Reich, E., *On the mapping with complex dilatation  $ke^{i\theta}$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **12** (1987), 261–268.
- [Te] Teichmüller, O., *Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung*, Deutsche Math. **7** (1944), 336–343; Auch in: *Gesammelte Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1982.

Fachbereich Mathematik und Informatik      received January 29, 2000  
der Martin-Luther-Universität  
Halle-Wittenberg  
D - 06099 Halle/Saale, Deutschland