ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. XLVIII, 3 SECTIO H 2014

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu, Katedra Ekonometrii i Statystyki

EWA DZIAWGO

Analiza wpływu czasu wygaśnięcia na ryzyko korytarzowych opcji kupna

Analysis of the influence of the time to maturity on the risk of the corridor call options

Słowa kluczowe: instrumenty pochodne, opcja kupna

Key words: derivatives, call option

Wstęp

Opcje korytarzowe należą do klasy opcji hybrydowych, które są innowacyjnymi instrumentami inżynierii finansowej. Ich konstrukcja polega na łączeniu klasycznych opcji w celu dostosowywania funkcji wypłaty do istniejących potrzeb inwestycyjnych [Bhattacharya, 1999, s. 143; Anson, 1999, s. 225; Briys i inni, 1998, s. 349]. W sytuacji wzrostu zmienności warunków rynkowych stosowanie nowych rozwiązań w dziedzinie zarządzania ryzykiem ma kluczowe znaczenie dla poprawy wyników finansowych [Miller, 1992; Joe, 1999].

Ważnym elementem w zarządzaniu ryzykiem kontraktów opcyjnych jest analiza wartości miar wrażliwości ceny opcji. Są to miary ryzyka, które określają wpływ zmiany wartości czynnika ryzyka na cenę opcji. Do miar ryzyka opcji należą: współczynniki delta, gamma, vega, theta i rho [Hull, 2002, s. 368; Jajuga, 2007, s. 104; Tarczyński, Zwolankowski, 1999, s. 156; Willmot, 2000, s. 102; Dziawgo, 2003, s. 103].

Czas wygaśnięcia jest czynnikiem wpływającym na cenę opcji, w związku z czym może on istotnie determinować kształtowanie się ryzyka opcji korytarzowych.

W artykule przedstawiono własności korytarzowej opcji kupna: funkcję wypłaty, model wyceny, wpływ ceny instrumentu bazowego i czasu wygaśnięcia na kształtowanie się ceny opcji i wartości współczynników delta, gamma, vega, theta i rho. Celem opracowania jest zaprezentowanie wpływu terminu wygaśnięcia na kształtowanie się ryzyka ceny korytarzowych opcji kupna. Ilustrację empiryczną przedstawiono na bazie symulacji wyceny korytarzowych opcji walutowych wystawionych na EUR/PLN.

1. Korytarzowa opcja kupna i jej funkcja wypłaty

Hybrydowa korytarzowa opcja kupna jest kombinacją standardowej opcji kupna oraz standardowej opcji sprzedaży, która powstaje w wyniku zajęcia długiej pozycji w opcji kupna z ceną wykonania H oraz krótkiej pozycji w opcji sprzedaży z ceną wykonania F, przy czym $F < H$.

Nabycie korytarzowej opcji kupna umożliwia zabezpieczenie się przed wzrostem ceny instrumentu bazowego. Ponadto otrzymuje się gwarancję, że w dniu wygaśnięcia opcji będzie można kupić instrument bazowy po cenie, która jest zawarta w przedziale $K = [F;H]$.

Ceny wykonania opcji standardowych tworzą przedział nazywany korytarzem opcji hybrydowej. W dniu wygaśnięcia funkcję wypłaty hybrydowej opcji kupna z korytarzem $K = [F;H]$ określa wzór:

$$f = \begin{cases} S_T - F, & gdy \quad S_T < F \\ 0, & gdy \quad F \le S_T \le H \\ S_T - H, & gdy \quad S_T > H \end{cases} \tag{1}$$

gdzie:
f – funkcja wypłaty korytarzowej opcji kupna,
S_T – cena instrumentu bazowego w chwili T,
T – czas wygaśnięcia opcji,
F – cena wykonania opcji sprzedaży,
H – cena wykonania opcji kupna, przy czym $F < H$.
Wartość korytarzową opcji kupna opisuje równanie:

$$c_t = S_t e^{-q(T-t)} \left[N(d_1) + N(-\overline{d}_1) \right] - e^{-r(T-t)} \left[HN(d_2) + FN(-\overline{d}_2) \right] \tag{2}$$

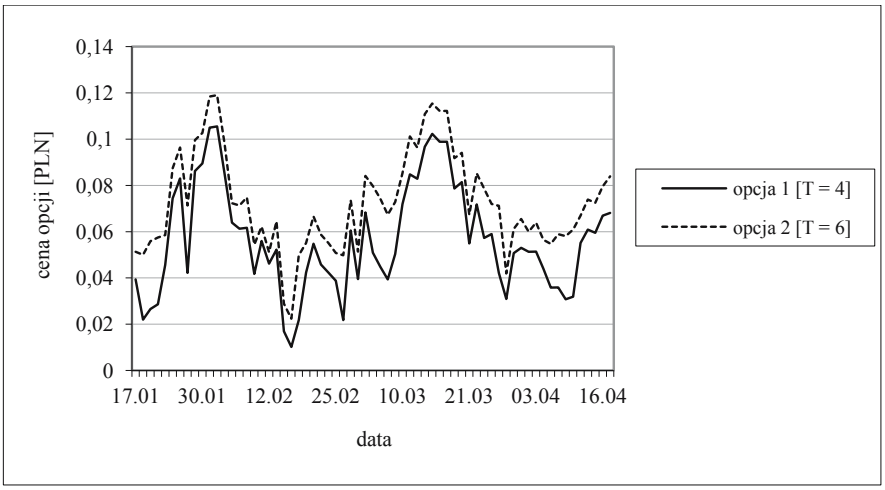
gdzie:
c_t – cena korytarzowej opcji kupna w chwili t, $t \in [0,T]$,
r – stopa procentowa wolna od ryzyka,
σ – zmienność ceny instrumentu bazowego,
q – stopa dywidendy,

S_T – cena instrumentu bazowego w chwili t,
$N(d)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego zmiennej d,
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $\overline{d}_2 = \overline{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t}$,

$$\overline{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{F}\right) + (r - q + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{H}\right) + (r - q + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Na rysunku 1 przedstawiono kształtowanie się ceny dwóch korytarzowych opcji kupna, które różnią się terminem wygaśnięcia – w przypadku jednej opcji wynosi on 4 miesiące, a drugiej – 6. Opcje wystawione są na EUR/PLN. Korytarz rozpatrywanych opcji wynosi K = [4,1; 4;18]. Symulacja wyceny dotyczy okresu 17.01.2014–17.04.2014 r.

W analizowanym okresie w dniach: 27.01.2014 r., 31.01.2014 r., 03.02.2014 r., 14–17.03.2014 r. zaznaczył się istotny wzrost ceny instrumentu bazowego. Natomiast jej spadek wystąpił w dniach: 17–23.01.2014 r., 28.01.2014 r., 26.02.2014 r., 28.02.2014 r., 21.03.2014 r., 28.03.2014 r., 04.04.2014 r. W dniu 17.02.2014 r. miał miejsce znaczny spadek ceny instrumentu bazowego.



Rysunek 1. Kształtowanie się ceny korytarzowych opcji kupna. Opcje różnią się terminem wygaśnięcia

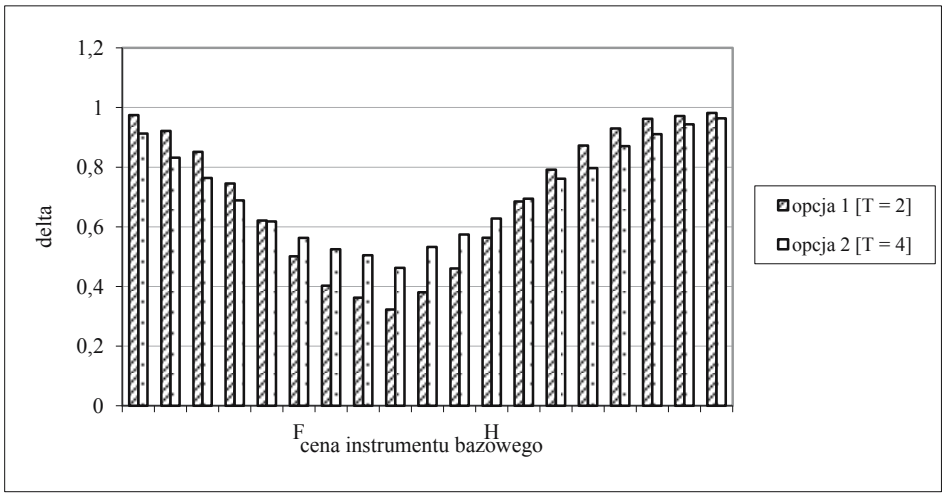
Źródło: opracowanie własne.

Opcje z dłuższym terminem wygaśnięcia są droższe. W rozpatrywanym okresie wystąpiły znaczne wahania ceny korytarzowej opcji kupna. Wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost/spadek ceny korytarzowej opcji kupna. Znaczny spadek ceny instrumentu bazowego przyczynił się do znacznego spadku ceny korytarzowej opcji kupna (np. 17.02.2014 r.).

2. Wpływ terminu wygaśnięcia na kształtowanie się ryzyka ceny korytarzowej opcji kupna

2.1. Współczynnik delta

Współczynnik delta określa, o ile zmieni się cena opcji, jeśli cena instrumentu bazowego zmieni się o jednostkę. Na rysunku 2 przedstawiono wpływ ceny instrumentu bazowego i czasu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika delta korytarzowych opcji kupna. Współczynnik delta korytarzowej opcji kupna przyjmuje wartości dodatnie, co oznacza, że wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost/spadek ceny opcji. Wartości współczynnika delta należą do przedziału [0;1]. Najniższa wartość współczynnika delta występuje w przypadku, kiedy cena instrumentu bazowego kształtuje się w pobliżu środka wyznaczonego korytarza. Wówczas cena opcji charakteryzuje się najmniejszą wrażliwością na zmianę ceny instrumentu bazowego.



Rysunek 2. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz terminu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika delta ceny korytarzowych opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego w stosunku do środka wyznaczonego korytarza wpływa na wzrost wartości współczynnika delta.

Opcja z dłuższym terminem wygaśnięcia charakteryzuje się wyższą wartością współczynnika delta w przypadku gdy:

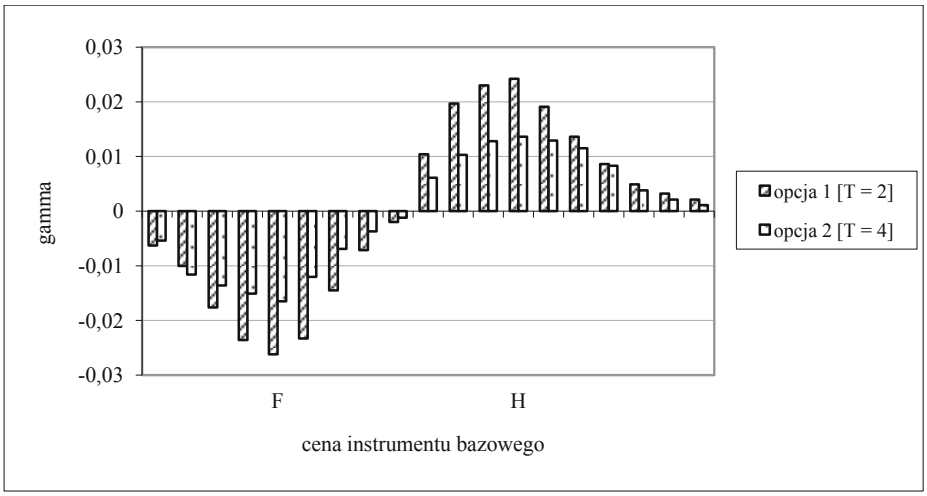
- cena instrumentu bazowego znajduje się w wyznaczonym przedziale $K = [F;H]$,
- cena instrumentu bazowego zbliża się do punktów krańcowych wyznaczonego przedziału.

W pozostałych przypadkach opcja z krótszym terminem wygaśnięcia charakteryzuje się wyższą wartością współczynnika delta, a tym samym większą wrażliwością

na zmianę ceny instrumentu bazowego. Największa różnica wartości współczynników delta opcji różniących się terminem wygaśnięcia występuje w przypadku, kiedy cena instrumentu bazowego zbliża się do środka wyznaczonego przedziału $K = [F;H]$.

2.2. Współczynnik gamma

Współczynnik gamma wskazuje, o ile zmieni się wartość współczynnika delta, gdy cena instrumentu bazowego zmieni się o jednostkę. Rysunek 3 ilustruje wpływ ceny instrumentu bazowego i czasu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika gamma korytarzowych opcji kupna.



Rysunek 3. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz terminu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika gamma ceny korytarzowych opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli cena instrumentu bazowego znajduje się powyżej/poniżej wyznaczonego przedziału, to współczynnik gamma korytarzowych opcji kupna jest dodatni/ujemny. Dodatnia wartość współczynnika gamma oznacza, że wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost/spadek wartości współczynnika delta. Najwyższa dodatnia wartość współczynnika gamma występuje w przypadku, kiedy cena instrumentu bazowego zbliża się do końca wyznaczonego korytarza.

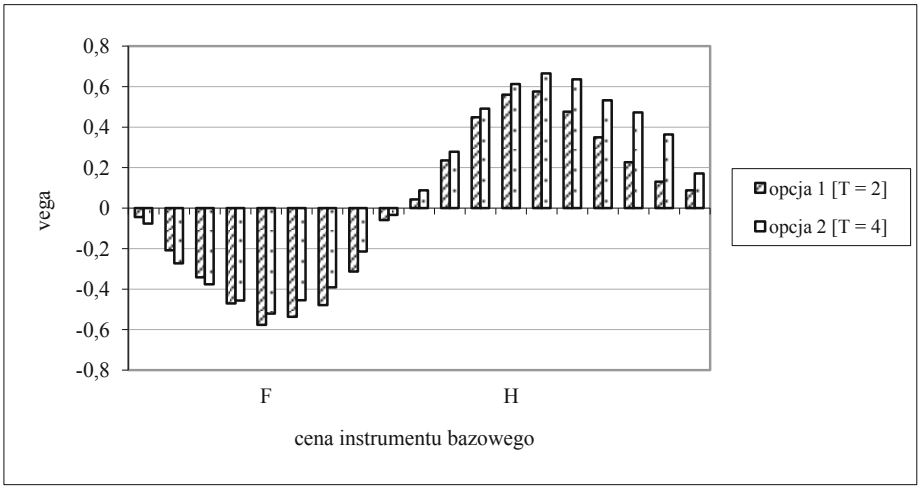
Jeżeli występuje ujemna wartość współczynnika gamma, to wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek/wzrost wartości współczynnika delta. Najniższa ujemna wartość współczynnika gamma występuje, gdy cena instrumentu bazowego oscyluje wokół punktu początkowego korytarza.

Opcje z krótszym terminem wygaśnięcia charakteryzują się większą wartością bezwzględną współczynnika gamma. Jeśli cena instrumentu bazowego jest znacz-

nie oddalona od punktów krańcowych wyznaczonego korytarza, to zmniejsza się różnica między wartościami współczynnika gamma opcji różniących się terminem wygaśnięcia.

2.3. Współczynnik vega

Współczynnik vega wskazuje, o ile zmieni się cena opcji, gdy odchylenie standardowe ceny instrumentu bazowego zmieni się o jednostkę. Rysunek 4 przedstawia wpływ ceny instrumentu bazowego i czasu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika vega korytarzowych opcji kupna.



Rysunek 4. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz terminu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika vega ceny korytarzowych opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Korytarzowa opcja kupna charakteryzuje się dodatnią/ujemną wartością współczynnika vega, jeśli cena instrumentu bazowego znajduje się powyżej/poniżej środka wyznaczonego przedziału. Jeśli współczynnik vega jest dodatni, to wzrost/spadek zmienności ceny instrumentu bazowego powoduje wzrost/spadek ceny opcji. Ujemna wartość współczynnika vega oznacza, że wzrost/spadek zmienności ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek/wzrost ceny opcji. Wyższa wartość bezwzględna współczynnika vega świadczy o większej wrażliwości ceny opcji na wahania zmienności ceny instrumentu bazowego.

Jeżeli cena instrumentu bazowego znajduje się w pobliżu punktów krańcowych wyznaczonego korytarza, to współczynnik vega przyjmuje wyższą wartość bezwzględnę. Wówczas cena opcji odznacza się większą wrażliwością na wahania zmienności ceny instrumentu bazowego. Jeżeli cena instrumentu bazowego zbliża

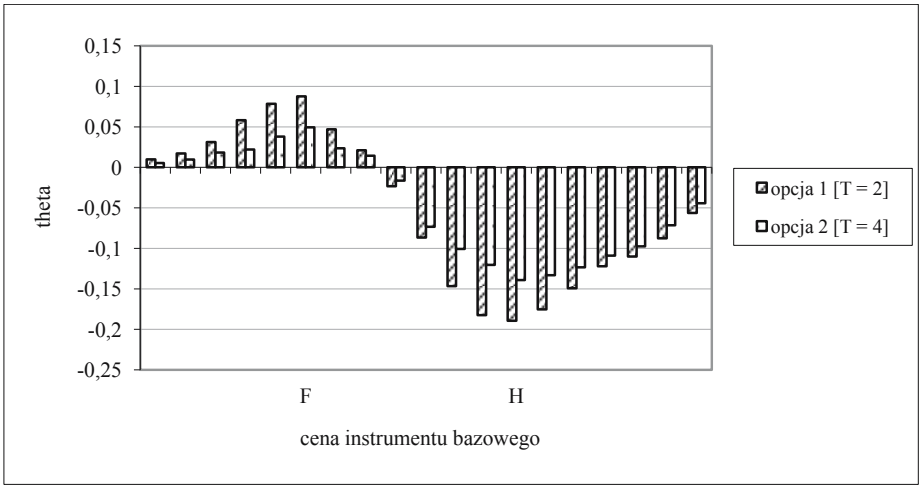
się do środka wyznaczonego korytarza lub oddala się od jego punktów krańcowych, to wartość bezwzględna współczynnika vega spada, a tym samym zmniejsza się wrażliwość ceny opcji na wahania zmienności ceny instrumentu bazowego. Opcja z dłuższym terminem wygaśnięcia charakteryzuje się wyższą wartością bezwzględną współczynnika vega, jeśli cena instrumentu bazowego:

- znajduje się powyżej środka wyznaczonego korytarza,
- znajduje się znacznie poniżej punktu początkowego korytarza.

W pozostałych przypadkach współczynnik vega opcji z krótszym terminem wygaśnięcia jest wyższy od współczynnika vega opcji z dłuższym terminem wygaśnięcia i wówczas cena opcji z krótszym terminem wygaśnięcia odznacza się większą wrażliwością na wahania zmienności ceny instrumentu bazowego.

2.4. Współczynnik theta

Współczynnik theta określa zmianę wartości opcji, gdy długość okresu do terminu wygaśnięcia spadnie o jednostkę. Rysunek 5 jest ilustracją wpływu ceny instrumentu bazowego i czasu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika theta korytarzowych opcji kupna.



Rysunek 5. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz terminu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika theta ceny korytarzowych opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Jeśli cena instrumentu bazowego znajduje się poniżej środka korytarza, to współczynnik theta jest dodatni. Wówczas opcja z dłuższym terminem wygaśnięcia jest tańsza. Najwyższa dodatnia wartość współczynnika theta zaznacza się w sytuacji kształtowania się ceny instrumentu bazowego w pobliżu punktu początkowego

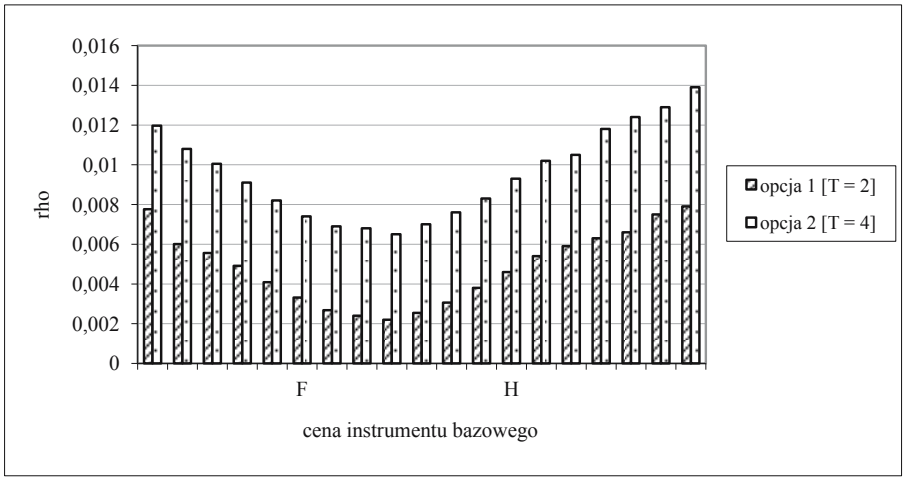
korytarza. W przypadku wzrostu/spadku ceny instrumentu bazowego w stosunku do punktu początkowego korytarza zmniejszają się wartości współczynnika theta.

Jeżeli cena instrumentu bazowego znajduje się powyżej środka korytarza, to współczynnik theta korytarzowej opcji kupna jest ujemny. W tym przypadku opcja z dłuższym terminem wygaśnięcia jest droższa. Najniższa ujemna wartość współczynnika theta występuje w sytuacji, gdy cena instrumentu bazowego oscyluje wokół wartości punktu końcowego korytarza. Wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego w stosunku do końca korytarza przyczynia się do wzrostu wartości współczynnika theta, a tym samym do spadku wrażliwości ceny opcji na zmniejszanie się długości okresu do wygaśnięcia opcji.

Wartość bezwzględna współczynnika theta opcji z krótszym terminem wygaśnięcia jest wyższa od wartości bezwzględnej opcji z terminem dłuższym. Świadczy to o większej wrażliwości opcji z krótszym terminem wygaśnięcia na zbliżanie się terminu wygaśnięcia opcji.

2.5. Współczynnik rho

Współczynnik rho wskazuje, o ile zmieni się cena opcji, gdy stopa procentowa aktywów wolnych od ryzyka zmieni się o jednostkę. Na rysunku 6 przedstawiono wpływ ceny instrumentu bazowego oraz czasu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika rho korytarzowych opcji kupna.



Rysunek 6. Wpływ ceny instrumentu bazowego oraz terminu wygaśnięcia na kształtowanie się wartości współczynnika rho ceny korytarzowych opcji kupna

Źródło: opracowanie własne.

Wartości współczynnika rho korytarzowej opcji kupna są dodatnie. W związku z tym wzrost/spadek stopy procentowej aktywów wolnych od ryzyka wpływa na wzrost/spadek ceny opcji. Jeśli cena instrumentu bazowego oscyluje w pobliżu środka wyznaczonego korytarza, to wartość współczynnika rho jest najniższa. W tej sytuacji cena opcji charakteryzuje się najmniejszą wrażliwością na zmianę stopy procentowej. Wzrost/spadek ceny instrumentu bazowego w stosunku do środka wyznaczonego korytarza przyczynia się do wzrostu wartości współczynnika rho. Opcja charakteryzująca się dłuższym terminem wygaśnięcia odznacza się wyższą wartością współczynnika rho. Stąd cena opcja z dłuższym terminem wygaśnięcia jest wrażliwsza na wahania stopy procentowej.

Zakończenie

Czas wygaśnięcia stanowi czynnik, który istotnie wpływa na cenę oraz na wartości miar ryzyka korytarzowej opcji kupna. Jeśli cena instrumentu bazowego znajduje się poniżej środka wyznaczonego korytarza, to opcja kupna charakteryzująca się dłuższym terminem wygaśnięcia jest tańsza. W przeciwnym przypadku opcje z dłuższym terminem wygaśnięcia są droższe. Z przeprowadzonej analizy kształtowania się wartości miar wrażliwości wynika, że wpływ i siła oddziaływania terminu wygaśnięcia na ryzyko ceny korytarzowej opcji kupna zależą od położenia bieżącej ceny instrumentu bazowego w stosunku do środka wyznaczonego przedziału oraz jego punktów krańcowych.

Cena korytarzowej opcji kupna z krótszym terminem wygaśnięcia jest bardziej wrażliwa na:

- zbliżanie się terminu wygaśnięcia opcji,
- zmianę ceny instrumentu bazowego, jeśli cena instrumentu bazowego jest znacznie niższa/wyższa od początku/końca korytarza,
- wahania zmienności ceny instrumentu bazowego, o ile cena instrumentu bazowego znajduje się poniżej środka korytarza lub nieznacznie poniżej od punktu początkowego korytarza.

Z kolei cena korytarzowej opcji kupna z dłuższym terminem wygaśnięcia jest bardziej wrażliwa na:

- zmianę stopy procentowej,
- wahania zmienności, o ile cena instrumentu bazowego jest znacznie oddalona od początku korytarza lub znajduje się powyżej środka korytarza,
- zmianę ceny instrumentu bazowego, jeżeli cena instrumentu bazowego mieści się w wyznaczonym korytarzu lub kształtuje się na poziomie nieznacznie niższym/wyższym od punktu początkowego/końcowego korytarza.

Wartość bezwzględna współczynnika gamma opcji z krótszym terminem wygaśnięcia jest wyższa od wartości bezwzględnej współczynnika gamma opcji z dłuższym terminem wygaśnięcia. Stąd wartość współczynnika delta opcji z krótszym terminem

wygaśnięcia charakteryzuje się wiekszą wrażliwością na zmianę ceny instrumentu bazowego.

Znaczne wahania wartości miar wrażliwości ceny opcji korytarzowej, które pojawiają się w przypadku kształtowania się ceny instrumentu bazowego w pobliżu punktów krańcowych korytarza oraz środka korytarza, zwiększają atrakcyjność tej opcji jako instrumentu transakcji spekulacyjnych. W zależności od oczekiwań związanych z kształtowaniem się ceny instrumentu bazowego w przyszłości wybór korytarzowej opcji z odpowiednią długością korytarza i czasem wygaśnięcia pozwala na kształtowanie profili dochodu z danych opcji.

Bibliografia

1. Anson M.J.P., *Valuing Embedded Options in Interest Rate Caps, Floors and Collars*, [in:] *The handbook of fixed income options: strategies, pricing and applications*, F.J. Fabozzi (ed.), Irwin Professional Publishing, Chicago 1999.
2. Bhattacharya A.K., *Interest-Rate Caps, Floors and Compound Options*, [in:] *The handbook of fixed income options: strategies, pricing and applications*, F.J. Fabozzi (ed.), Irwin Professional Publishing, Chicago 1999.
3. Briys E., Bellalah M., Mai H.M., Varenne F., *Options, Futures and Exotic Derivatives*, John Wiley & Sons, Chichester 1998.
4. Dziawgo E., *Modele kontraktów opcyjnych*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń 2003.
5. Hull C.J., *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International. Inc. 2002.
6. Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
7. Joe G., *Defining Financial Engineering*, „Financial Engineering News" 1999, 9.
8. Miller M.H., *Financial Innovation: Achievements and Prospects*, „Journal of Applied Corporate Finance" 1992, 4.
9. Tarczyński W., Zwolankowski M., *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa 1999.
10. Wilmott P., *Derivatives. The Theory and Practice of Financial Engineering*, John Wiley & Sons, Chichester 2000.

Analysis of the influence of the time to maturity on the risk of the corridor call options

Corridor option belongs to the class of innovative financial instruments. The article presents the issues connected with corridor call options: characteristics of instruments, the pay-off function, the pricing model, the influence of the time to maturity and the price of the underlying instrument on the delta, gamma, vega, theta and rho coefficients.

The aim of the paper is to present the analysis of the influence of the time to maturity on the risk of corridor call options. The empirical illustration included in the article is concerned with the pricing simulations of the currency corridor options on EUR/PLN.